UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Modelos probabilísticos

Variables aleatorias continuas

Carlos Gamero Burón
José Luis Iranzo Acosta
Departamento de Economía Aplicada
Universidad de Málaga

Parcialmente financiado a través del PIE13-024 (UMA)

Parcialmente financiado a través
de PIE13-024 (UMA)

Estadística I
Bloque II

GRADO EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

VARIABLE ALEATORIA Y MODELOS PROBABILÍSTICOS

Tema 7: MODELOS PROBABILÍSTICOS PARA VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

7.1. Introducción

- Recordemos que…

  *un **modelo probabilístico** es una representación matemática deducida de un conjunto de supuestos con el doble propósito de estudiar los resultados de un experimento aleatorio y predecir su comportamiento futuro, cuando se realiza bajo las mismas condiciones dadas inicialmente.*

  El modelo permite conocer la distribución de probabilidad de los valores que toma la variable aleatoria, de ahí que también se mencione con el nombre de distribución de probabilidad.

- Modelos probabilísticos para variables aleatorias continuas

  1. Distribución Uniforme
  2. Distribución Gamma
  3. Distribución Exponencial
  4. Distribución Ji-dos
  5. Distribución Normal
  6. Distribución *t* de Student
  7. Distribución *F* de Snedecor
  8. Distribución Normal bivariante

7.2. Distribución Uniforme

- Es el modelo más simple

- Aparece cuando una variable toma valores dentro de un intervalo $[a,b]$ y su **función de densidad permanece constante** dentro de ese intervalo

- Esto implica que la probabilidad de que la variable tome valores en subintervalos de igual amplitud es la misma.

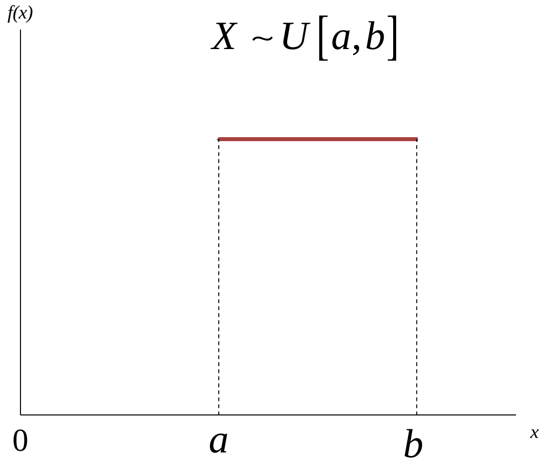
- Diremos que una variable aleatoria tiene una distribución uniforme en el intervalo $[a,b]$ si su **función de densidad** es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \qquad X \sim U[a,b]$$

En el denominador figura la amplitud del intervalo dominio de $f(x)$

- **Representación gráfica**:

Figura 5.6
Distribución Uniforme
(función de densidad)



También recibe también el nombre de *distribución rectangular*.

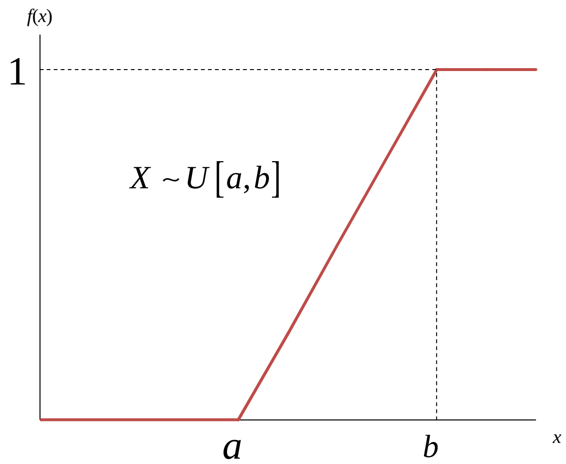
- Se comprueba fácilmente que es función de densidad

- **Función de distribución**:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Gráficamente:

Figura 5.7
Distribución Uniforme
(función de distribución)



- **Cálculo de probabilidades**: muy simple

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \frac{x_2 - a}{b-a} - \frac{x_1 - a}{b-a} = \frac{x_2 - x_1}{b-a}.$$

La probabilidad de que la variable uniforme tome valores en un intervalo determinado $[x_1, x_2]$ sólo depende de la amplitud de dicho intervalo $(x_2 - x_1)$, de manera que las probabilidades de intervalos con la misma amplitud serán idénticas.

- **Características**:

a) Esperanza: $\mu = E[X] = \dfrac{b+a}{2}$

Es el punto medio del intervalo.

La mediana de la distribución coincide con la media y carece de moda (no tiene máximo absoluto).

b) Varianza: $\sigma^2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

- Un **caso particular** de distribución uniforme, de uso muy extendido, es la distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$, es decir, $X \sim U[0,1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$E[X] = \mu = \frac{1}{2} \qquad Var[X] = \sigma^2 = \frac{1}{12}$$

- **Aplicaciones** de la distribución uniforme:

1. Situaciones de absoluta incertidumbre respecto a la probabilidad de los resultados de un experimento aleatorio (se admite que son equiprobables).
2. Redondeo de las diferencias entre valores observados y reales. Se supone que el error se distribuye uniformemente en el intervalo fijado por el redondeo (por ejemplo, de -0,5 a +0,5).
3. Aproximación de una distribución distinta de la uniforme en un intervalo muy pequeño.
4. La distribución uniforme [0,1] se utiliza en la generación de valores aleatorios (muestras) de cualquier variable.

***Ejemplo*:**

Una empresa tiene una curva de costes que viene dada por la siguiente función:

$$C = 100 + 2X$$

donde X es la demanda. En el mercado vende cada unidad de su producto a 5 euros. Si la empresa considera que la demanda se distribuye uniformemente en el intervalo $[250, 300]$, ¿cuál sería el beneficio esperado?

Resolución:

$X =$ "demanda en el intervalo [250,300]" $\quad X \sim U[250, 300]$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{300-250} & \text{si } 250 \le x \le 300 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

El beneficio será $B = I - C = pX - C(X)$, donde:

$I =$ Ingresos, $\mathrm{C} =$ Costes y $p =$ precio/unidad.

Sustituyendo: $\quad B = I - C = 5X - (100 + 2X) = 3X - 100.$

El beneficio esperado vendrá dado por: $E[B] = E[3X - 100] = 3E[X] - 100.$

Dado que X se distribuye uniformemente:

$$E[X] = \mu = \frac{a+b}{2} = \frac{300+250}{2} = 275 \text{ unidades}$$

de manera que: $E[B] = 3E[X] - 100 = 3 \cdot 275 - 100 = 725$ euros.

También podríamos haber calculado como:

$$E[B] = E[I - C] = \underbrace{E[I]}_{\substack{\text{ingresos}\\\text{esperados}}} - \underbrace{E[C]}_{\substack{\text{costes}\\\text{esperados}}} = 5E[X] - [100 + 2E[X]] = 5 \cdot 275 - 100 - 2 \cdot 275 = 725$$

7.3. Distribución Gamma

- **Utilidad:**

1) Se trata de una familia de distribuciones. Es una distribución biparamétrica de parámetros α y β, de manera que, en función de los valores de sus parámetros, nos encontramos con otras distribuciones con nombre propio en Estadística:

- Distribución de Erlang cuando α es entero.
- Distribución exponencial cuando $\alpha = 1$.
- Distribución Ji-dos de parámetro ν cuando $\alpha = \frac{\nu}{2}$ y $\beta = 2$.

2) Se utiliza para el estudio de la vida de un equipo industrial, como modelo para tiempos de espera en Teoría de Colas y también para modelizar la distribución de la renta personal.

- Su nombre procede de la relación que tiene con una función matemática, la función gamma de Euler, que tiene la siguiente expresión:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

que es convergente para $\alpha > 0$ y es continua.

- **Función de densidad:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & x > 0;\ \alpha, \beta > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$f(x)$ cumple las dos condiciones necesarias para ser función de densidad.

Notación abreviada: $X \sim G(\alpha, \beta)$ o también $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

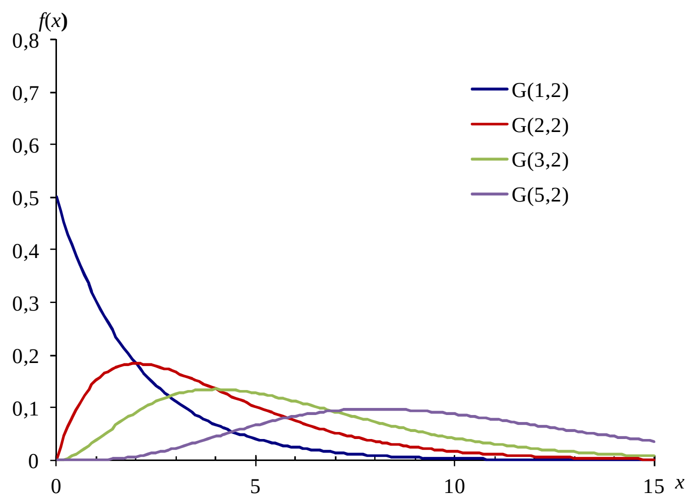
- **Interpretación de los parámetros:** distribución biparamétrica (α, β).

1. Al parámetro α se le conoce como parámetro de forma, pues el perfil de esta distribución cambiará según lo haga este parámetro (figura 5.8):

    - Si $\alpha > 1$ la distribución es campaniforme y asimétrica a la derecha, tendiendo a la simetría cuando crece α. Alcanza su máximo cuando $x = \beta(\alpha - 1)$, de forma que para un valor de β dado, a medida que crece α, el máximo de la función tiende a desplazarse a la derecha y la función se hace más simétrica.

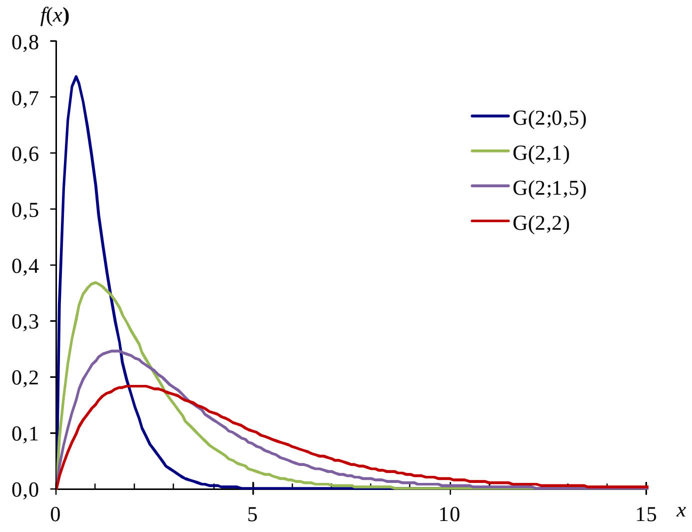
    - Si $\alpha \leq 1$ la distribución gamma tiene forma de *L*.

Figura 5.8
Distribución Gamma
(función de densidad para distintos valores de α)



2. Al parámetro β se le conoce como parámetro de escala. Gráficamente, un cambio en β estirará o comprimirá la curva, pero no alterará su perfil general (figura 5.9):

Figura 5.9
Distribución Gamma
(función de densidad para distintos valores de β)



- **Características de la distribución:**

a) Función generatriz de momentos

$$M_x(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}} \quad \text{para} \quad t < \frac{1}{\beta}.$$

b) Esperanza: $E[x] = \mu = \left.\frac{dM_x(t)}{dt}\right|_{t=0} = \alpha\beta.$

c) Varianza: $Var(x) = \sigma^2 = \left.\frac{d^2M_x(t)}{dt^2}\right|_{t=0} - \left[E[x]\right]^2 = \alpha\beta^2.$

Fácilmente se comprueba que:

Si $\beta = 1$ entonces $\mu = \sigma^2$
Si $\beta > 1$ entonces $\mu < \sigma^2$
Si $\beta < 1$ entonces $\mu > \sigma^2$.

- **Propiedad reproductiva**:

Supongamos que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son n variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim G(\alpha_i, \beta)$ con $i = 1, 2, ..., n$. Entonces:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta\right)$$

Demostración:

$$M_Y(t) = E\left[e^{tY}\right] = E\left[e^{t(X_1+X_2+\ldots+X_n)}\right] = E\left[e^{tX_1}e^{tX_2}\cdots e^{tX_n}\right] \underbrace{=}_{\text{por independencia}} E\left[e^{tX_1}\right]E\left[e^{tX_2}\right]\cdots E\left[e^{tX_n}\right] =$$

$$= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\cdots M_{X_n}(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha_1}} \cdot \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha_2}} \cdots \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha_n}} = \frac{1}{(1-\beta t)^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}} \quad \text{para } t < \frac{1}{\beta}$$

Esta es la función generatriz de momentos de una $G\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta\right)$, luego por el Teorema de Unicidad de la función generatriz de momentos, $Y \sim G\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \beta\right)$.

- **Aplicación de la distribución gamma a la modelización de tiempos de espera en la Teoría de Colas**

Cuando el parámetro α es entero, a la distribución gamma se le conoce también con el nombre de distribución de Erlang, y entonces se relaciona con la distribución de Poisson:

si X =”número de sucesos en un intervalo de tiempo *t*”

con $X \sim P(\lambda)$,

entonces

$T =$ "tiempo de espera hasta que ocurra el suceso $\alpha -$ésimo"

se distribuye $T \sim G\left(\alpha, \beta = \frac{1}{\lambda}\right)$, de forma que $P(T > t) = P(X \leq \alpha - 1)$.

Piénsese, por ejemplo, en que la probabilidad de que una operadora tenga que esperar más de 15 minutos hasta recibir la quinta llamada en una centralita es igual a la probabilidad de que se produzcan menos de cinco llamadas (cuatro o menos) en quince minutos.

Ejemplo:

Supongamos que el número de llamadas telefónicas que llegan a una centralita sigue una distribución de Poisson de media 4 cada 5 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que la operadora tenga que esperar más de un minuto antes de que se produzcan dos llamadas?

Solución:

Vamos a hacer que la unidad temporal sea el minuto, de modo que la intensidad del proceso de Poisson es $\lambda = \frac{4}{5}$:

$X =$ ”Número de llamadas en un intervalo de tiempo de 1 minuto”

$$X \sim P\left(\lambda = \frac{4}{5}\right).$$

T representa el tiempo de espera en minutos hasta que se recibe la segunda llamada, de manera que:

$T =$ "Tiempo en minutos hasta recibir la segunda llamada"

$$T \sim G\left(\alpha = 2, \beta = \frac{1}{\lambda} = \frac{5}{4}\right).$$

Hay que calcular $P(T > 1)$. Podría hacerse a partir de la distribución gamma, calculando la siguiente integral definida:

$$P(T > 1) = \int_{t=1}^{t=+\infty} \frac{1}{\Gamma(2)\left(\frac{5}{4}\right)^2} t e^{-\frac{4}{5}t} dt$$

Dada la relación con el proceso de Poisson, resulta más cómodo resolver este ejercicio de manera exacta de la siguiente forma teniendo en cuenta que:

La probabilidad de tener que esperar más de 1 minuto hasta la segunda llamada es igual a la probabilidad de que se reciban menos de dos llamadas en un minuto:

$$P(T>1)=P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{e^{-\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{0}}{0!}+\frac{e^{-\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{1}}{1!}=$$

$$=e^{-\frac{4}{5}}+\frac{4}{5}e^{-\frac{4}{5}}=\frac{9}{5}e^{-\frac{4}{5}}=0,8088.$$

De tal forma que los cálculos se hacen con la distribución de Poisson, sin tener que integrar.

7.4. Distribución Exponencial

- Una variable aleatoria X se dice que se distribuye según el modelo exponencial de parámetro β cuando su **función de densidad** se expresa como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & x > 0;\ \beta > 0 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Como notación abreviada emplearemos la siguiente: $X \sim Exp(\beta)$.

- **Aplicaciones**:

La distribución exponencial es un caso particular de la distribución de Erlang (Gamma con α entero) en la que el parámetro α toma el valor 1. Por ello es un modelo que se presenta con frecuencia para modelizar:

1. La distribución del tiempo de espera hasta la ocurrencia de un suceso de Poisson.
2. Tiempo transcurrido entre la presentación de sucesos consecutivos de Poisson.
3. La duración de vida de ciertos elementos que puede considerarse como el tiempo que transcurre hasta que se produce la extinción, avería, fallo etc.

- **Relación entre la distribución exponencial y la Poisson:**

Si X =”número de sucesos en una unidad de tiempo” con $X \sim P(\lambda)$,

entonces

$T =$ "tiempo hasta ocurrencia de un suceso" con $T \sim Exp\left(\beta = \frac{1}{\lambda}\right)$

Importante: la unidad temporal debe ser la misma.

- **Características:**

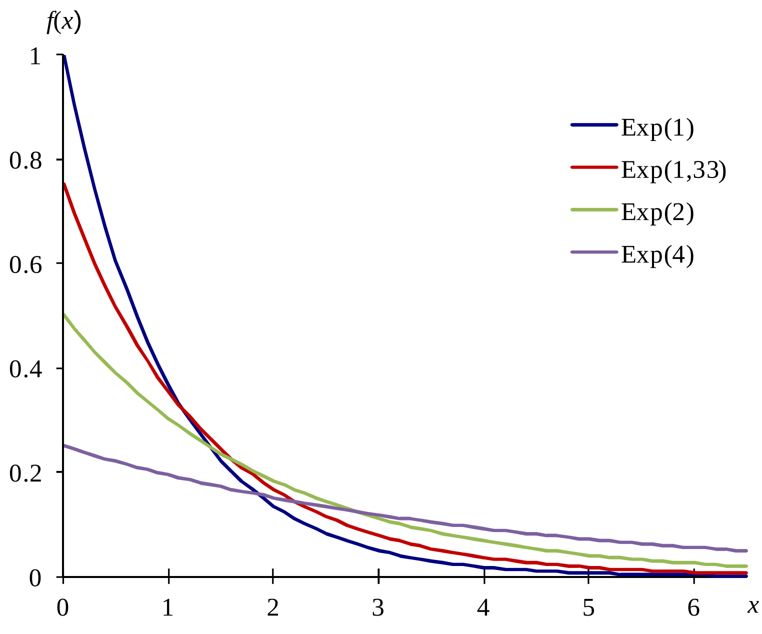
La función generatriz de momentos y las características (media, varianza) de la distribución exponencial se deducen del hecho de ser un caso particular de la distribución $\mathrm{G}(\alpha,\ \beta)$ con $\alpha = 1$:

	$\mathrm{G}(\alpha,\ \beta)$	$Exp(\beta)$ $(\alpha = 1)$
$M_x(t)$	$M_x(t) = \dfrac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}};\quad t < \dfrac{1}{\beta}$	$M_x(t) = \dfrac{1}{(1-\beta t)};\quad t < \dfrac{1}{\beta}$
$E[X] = \mu$	$\alpha\beta$	β
$Var(X) = \sigma^2$	$\alpha\beta^2$	β^2

Obsérvese que el valor esperado y la desviación típica de una distribución exponencial coinciden.

- **Forma de la distribución:**

La función de densidad tiende a cero más deprisa cuanto menor es el valor de β (menor tiempo medio) es decir, cuando mayor es la intensidad de la distribución de Poisson subyacente.



- **Función de distribución:**

$$F(x)=P\left(X\leq x\right)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \frac{1}{\beta}e^{-\frac{t}{\beta}}dt=\left[-e^{-\frac{t}{\beta}}\right]_0^x=-e^{-\frac{x}{\beta}}+e^{-\frac{0}{\beta}}=1-e^{-\frac{x}{\beta}} \quad x\geq 0$$

$F(x)$ proporciona la **probabilidad de que ocurra un suceso (por ejemplo, el fallo en una máquina) en un periodo de tiempo inferior o igual a *x***. Ahora bien, como $P(X\leq x)=1-P(X>x)$, se tiene que:

$$P(X>x)=e^{-\frac{x}{\beta}}$$

es la probabilidad complementaria a la anterior, es decir, la **probabilidad de que no se produzca ningún suceso en un intervalo de tiempo *x***. Es, por tanto, la probabilidad de que el tiempo hasta que ocurra un suceso (por ejemplo, el fallo de un componente) sea mayor que *x*. Es por ello que la función $P(X>x)$ recibe el nombre de ***función de fiabilidad*** o ***función de supervivencia***.

- **Propiedades:**

1. Propiedad de falta de memoria:

Se cumple que la probabilidad de que la vida de un elemento sea superior a $x+h$, habiendo sobrevivido el tiempo *x*, es igual a la probabilidad de supervivencia para el período *h*:

$$P(X>x+h/X>x)=P(X>h)$$

Dicho de otro modo, la probabilidad de que no se produzca un suceso (fallo, avería, etc.) durante un período *h* es independiente de lo que haya sucedido antes. Por eso esta propiedad se conoce como de falta de memoria.

$$P(X > x+h / X > x) = \frac{P(\{X > x+h\} \cap \{X > x\})}{P(X > x)} = \frac{P(X > x+h)}{P(X > x)} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{\beta}(x+h)}}{e^{-\frac{1}{\beta}x}} = e^{-\frac{h}{\beta}} = P(X > h).$$

2. Distribución de la suma de exponenciales independientes:

Supongamos que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son n variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim Exp(\beta)$ con $i = 1, 2, ..., n.$ (con igual parámetro β). Entonces:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(n, \beta)$$

Ejemplo:

La duración de una bombilla antes de fundirse sigue una distribución exponencial de media 8 meses. Se pide:

1) Calcular la probabilidad de que una bombilla seleccionada al azar tenga una vida entre 3 y 12 meses.
2) Calcular la probabilidad de que una bombilla, que ha durado ya más de 10 meses, dure más de 25 meses.

T = "tiempo de duración de la bombilla" $T \sim \mathrm{E}(\beta = 8)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & x > 0;\ \beta > 0 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases} \qquad F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}} \quad x \ge 0$$

1) $P(3 \le T \le 12) = F(12) - F(3) = \left[1 - e^{-\frac{12}{8}}\right] - \left[1 - e^{-\frac{3}{8}}\right] = e^{-\frac{3}{8}} - e^{-\frac{12}{8}} = 0,4642$

2) $P(T > 25 / T > 10) \underbrace{=}_{\text{por la propiedad de falta de memoria}} P(T > 15) = e^{\frac{-15}{8}} = 0,1534.$

Veámoslo mediante la relación entre Poisson y exponencial:

Queremos conocer $P(T>15)$. Esta situación es equivalente a que no se rompa ninguna bombilla en 15 meses. El número de bombillas que se rompen en un mes sigue una distribución de Poisson de parámetro $X \sim P\left(\mu=\frac{1}{\beta}=\frac{1}{8}\right)$. Por la propiedad reproductiva de la distribución de Poisson, el número de bombillas que se rompen en 15 meses seguirá una distribución $Y \sim P\left(\mu=\frac{15}{8}\right)$. Por tanto:

$$P(T>15)=P(Y=0)=\frac{e^{-\frac{15}{8}}\left(\frac{15}{8}\right)^{0}}{0!}=e^{-\frac{15}{8}}=0{,}1534$$

Como vemos, el resultado obtenido es el mismo.

7.5. Distribución Ji-dos

- **Función de densidad:**

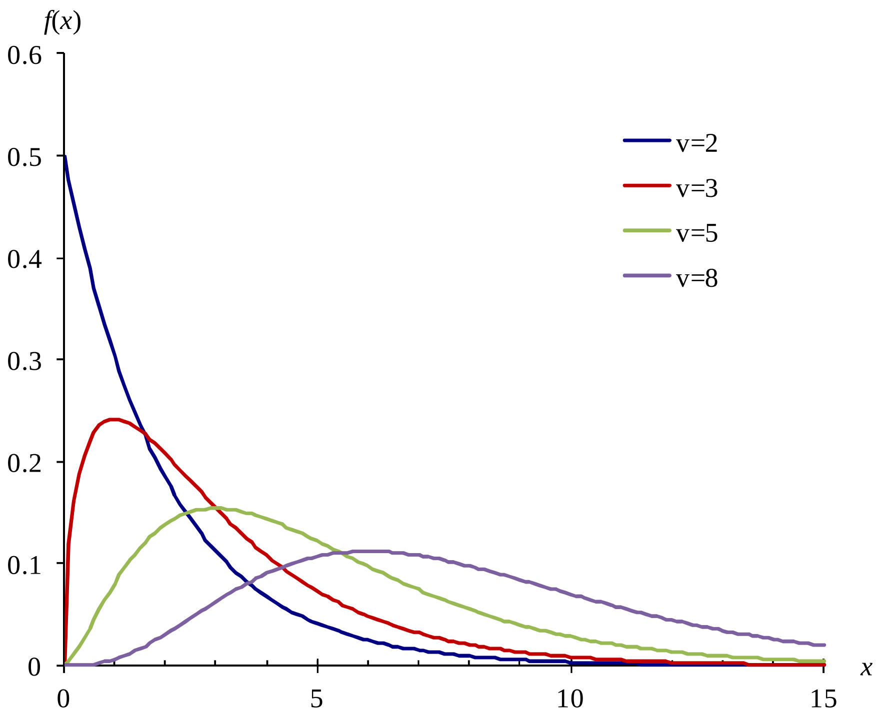
La distribución Ji-dos es un caso particular de la Gamma con parámetros $\beta = 2$ y $\alpha = \nu / 2$, siendo ν un entero positivo, es decir, $G\left(\alpha = \frac{\nu}{2}, \beta = 2\right)$. Su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \quad \nu > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Es una distribución uniparamétrica (parámetro ν) denominado grados de libertad:

$$X \sim \chi^2_\nu$$

- **Forma de la distribución:** Cuando $\nu = 2$, exponencial ($\alpha = \frac{\nu}{2} = 1;\ \beta = 2$)



- **Aplicaciones:**

De gran interés, muy utilizada en **Inferencia Estadística**.

Como veremos más adelante, esta distribución puede definirse sin recurrir a la distribución Gamma, como suma de ν normales tipificadas independientes elevadas al cuadrado.

- **Características:**

Se deducen del hecho de ser un caso particular de la distribución $G(\alpha,\ \beta)$ con $\alpha = \nu/2$ y $\beta = 2$:

	$G(\alpha,\ \beta)$	χ^2_ν $(\alpha = \nu/2 \quad \beta = 2)$
$M_x(t)$	$M_x(t) = \dfrac{1}{(1-\beta t)^\alpha};\quad t < \dfrac{1}{\beta}$	$M_x(t) = \dfrac{1}{(1-2t)^{\frac{\nu}{2}}};\quad t < \dfrac{1}{2}$
$E[X] = \mu$	$\alpha\beta$	$\dfrac{\nu}{2}\cdot 2 = \nu$
$Var(X) = \sigma^2$	$\alpha\beta^2$	$\dfrac{\nu}{2}\cdot 2^2 = 2\nu$

Vemos que la esperanza de la distribución Ji-dos es igual al número de grados de libertad, mientras que la varianza, al doble.

- **Propiedad reproductiva:**

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son n variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim \chi^2_{\nu_i}$ con $i = 1, 2, \ldots, n,$ entonces:

$$Y = \sum_{i=1}^{i=n} X_i \sim \chi^2_{\left(\sum_{i=1}^{i=n} \nu_i\right)}.$$

Es consecuencia inmediata de la propiedad reproductiva que se verifica para la gamma, cuando β permanece constante. Dado que

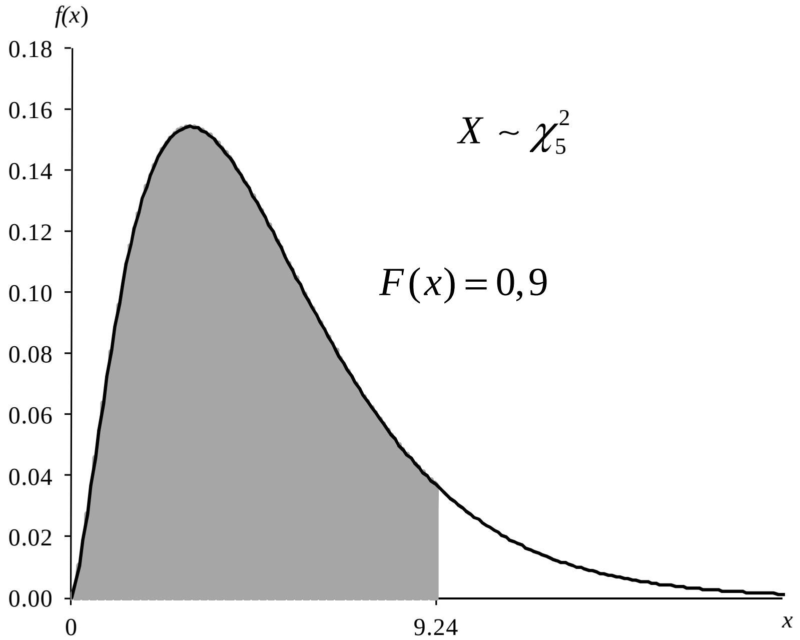
$X_i \sim G\left(\frac{\nu_i}{2}, 2\right)$, $Y = \sum_{i=1}^{i=n} X_i \sim G\left(\frac{\nu_1}{2} + \frac{\nu_2}{2} + \ldots + \frac{\nu_n}{2}, 2\right)$, que es una χ^2 con $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n$ grados de libertad.

- **Obtención de probabilidades:**

Se puede realizar mediante el manejo de tablas, en las que aparece tabulada la función de distribución para distintos valores de ν (véase Anexo 5.1).

Veamos algunos **ejemplos**:

1. $P\left(\chi_5^2 \leq 9{,}24\right) = F(9{,}24) \underbrace{=}_{\text{tabla}} 0{,}9.$



2. $P\left(\chi_{20}^2 \leq 7{,}42\right) = F(7{,}42) \underbrace{=}_{\text{tabla}} 0{,}005.$

3. $P\left(\chi_{15}^2 \geq 7{,}26\right) = 1 - P\left(\chi_{15}^2 \leq 7{,}26\right) = 1 - F(7{,}26) \underbrace{=}_{\text{tabla}} 1 - 0{,}05 = 0{,}95.$

4. $P\left(3,94 \leq \chi^2_{10} \leq 23,19\right) = P\left(\chi^2_{10} \leq 23,19\right) - P\left(\chi^2_{10} \leq 3,94\right) \underbrace{=}_{\text{tabla}} 0,99 - 0,05 = 0,94.$

También podemos estar interesados en obtener valores concretos de la variable (valores críticos) que cumplen una condición en términos de probabilidad:

1. $P\left(\chi^2_7 \leq a\right) = 0,025 \quad \Rightarrow \quad F(a) = 0,025 \quad \Rightarrow \quad a = 1,69.$

2. $P\left(\chi^2_{10} \leq b\right) = 0,95 \quad \Rightarrow \quad F(b) = 0,95 \quad \Rightarrow \quad b = 18,31.$

3. $P\left(\chi^2_{13} \geq c\right) = 0,1 \quad \Rightarrow \quad 1 - P\left(\chi^2_{13} \leq c\right) = 0,1 \quad \Rightarrow \quad F(c) = 0,9 \quad \Rightarrow c = 19,81.$

- **Uso para la obtención de probabilidades de una gamma:**

Si $X \sim G(\alpha, \beta)$ entonces la variable $Y = \dfrac{2X}{\beta} \sim \chi^2_\nu$, donde $\nu = 2\alpha$

Ejemplo:

Supongamos que el número de clientes que llega a la ventanilla de un banco sigue una distribución de Poisson con media igual a 20 personas por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que el cajero tenga que esperar más de 47,115 minutos antes de que llegue el décimo cliente?

Tomando como unidad de tiempo el minuto, se tiene que:

X = "nº de personas que llegan a la ventanilla en 1 hora"
$X \sim P(\mu = 20)$

Y = "nº de personas que llegan a la ventanilla en 1 minuto"

$$Y \sim P\left(\lambda = \frac{20}{60}\right) = P\left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$$

T = "Tiempo de espera en minutos hasta el décimo cliente"

$$T \sim G\left(\alpha = 10, \beta = \frac{1}{\lambda} = 3\right)$$

La probabilidad solicitada es:

$$P(T > 47{,}115) = P\left(\frac{2T}{\beta} > \frac{2 \cdot 47{,}115}{3}\right) \underbrace{=}_{\substack{\text{donde } \frac{2T}{\beta} \sim \chi^2_{20} \\ (\nu = 2\alpha = 20)}} P\left(\chi^2_{20} > 31{,}41\right) =$$

$$= 1 - P\left(\chi^2_{20} \leq 31{,}41\right) \underbrace{=}_{\text{tabla}} 1 - 0{,}95 = 0{,}05.$$

Este ejercicio también puede resolverse utilizando la distribución de Poisson. El número de personas que llegan a la ventanilla en 47,115 minutos es una variable W que sigue una distribución de Poisson de parámetro $\mu = \lambda \cdot 47{,}115 = \frac{1}{3} \cdot 47{,}115 = 15{,}705$. De esta forma, podemos establecer la siguiente igualdad de probabilidades:

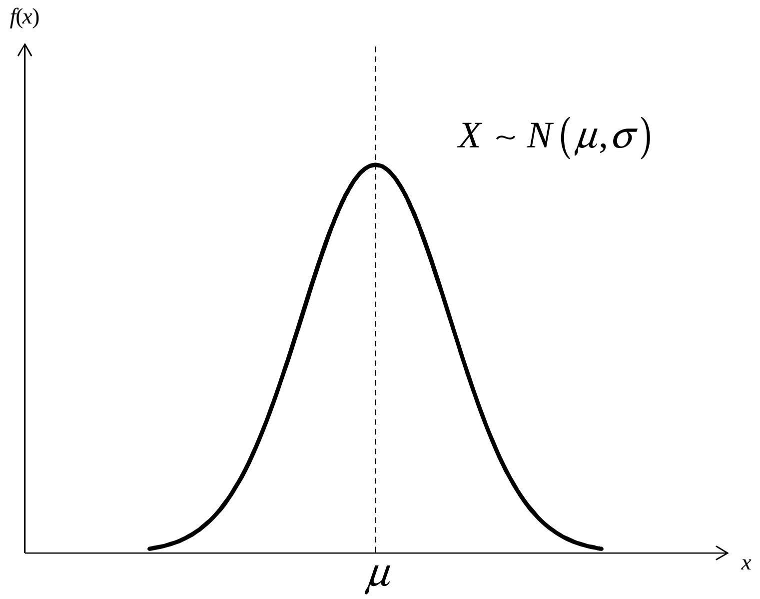
$$P(T > 47{,}115) = P\left(W \leq 9\right) = \sum_{w=0}^{w=9} P\left(W = w\right)$$

En este caso, para obtener las probabilidades de Poisson a partir de sus tablas aproximaríamos la media de la distribución a 15.

7.6. Distribución Normal

- **Utilidad:** La distribución normal es, sin duda, el más importante de los modelos probabilísticos. Es una distribución clave para la Inferencia Estadística.

- **Origen:** siglo XVIII
  La distribución empírica de los errores de medida tiene una gran regularidad: forma acampanada y simétrica
  - Los errores tendían a concentrarse en el centro de la distribución y
  - errores muy grandes poco frecuentes, tanto positivos como negativos.



- **Distintos nombres:** curva de Gauss, campana de Gauss, distribución de Laplace-Gauss, <u>modelo normal</u> o <u>distribución normal</u>.

- **Ejemplos:** la distribución normal es la más adecuada para…
  - datos meteorológicos como la temperatura o la cantidad de precipitaciones,
  - las calificaciones correspondientes a pruebas de aptitud,
  - las alturas de individuos de una edad y sexo dado,
  - las medidas físicas de productos manufacturados, etc.

- **Conveniencia del supuesto de normalidad:**

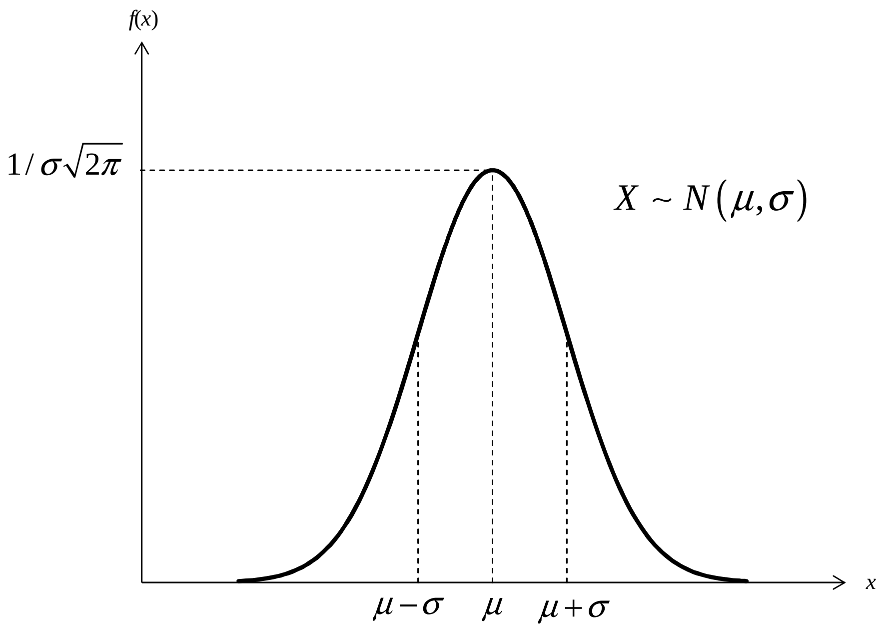
  a) Sus propiedades matemáticas.
  b) Cuando el comportamiento de una variable aleatoria es el resultado de una combinación de muchas causas relacionadas y poco importantes, tiende a distribuirse normalmente (Teoremas Centrales del Límite).

- **Función de densidad:**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty \qquad -\infty < \mu < \infty \qquad \sigma > 0$$

Notación abreviada: $X \sim N(\mu, \sigma)$.

- **Forma de la distribución:**



1. En $x = \mu$ alcanza su máximo la función de densidad, con $f(\mu) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
2. Puntos de inflexión (valores en los que se anula su segunda derivada): $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$.
3. La función de densidad normal es simétrica respecto a la recta $x = \mu$, ya que se verifica que $f(\mu + k) = f(\mu - k)$.
4. Presenta una asíntota horizontal en la recta $y = 0$, es decir, en el eje de abscisas.

- **Características de la distribución normal:**

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \qquad -\infty < t < \infty.$$

a) Esperanza: $E[X] = \mu$

$$M'_X(t) = (\mu + \sigma^2 t)\, e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$E[X] = M'_X(0) = (\mu + 0)e^0 = \mu$$

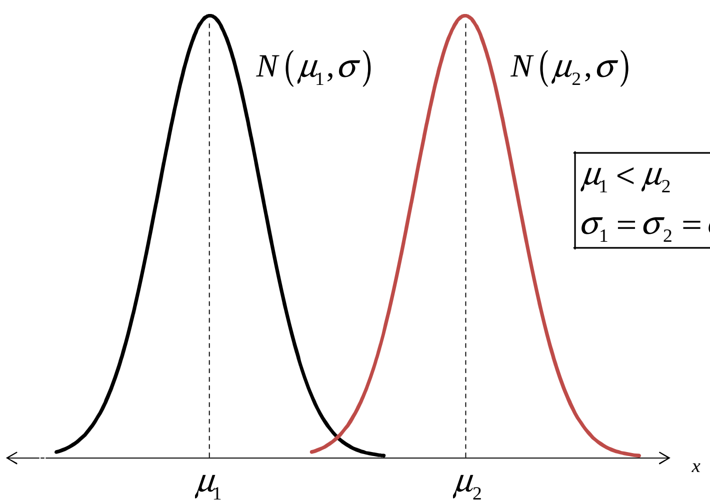
b) Varianza: $Var(X) = \sigma^2$

$$M''_X(t) = \sigma^2\, e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + \left(\mu + \sigma^2 t\right)^2 e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

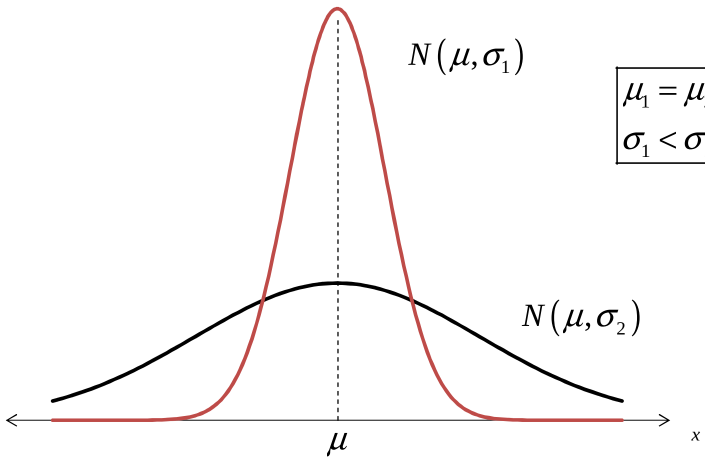
$$M''_X(0) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$Var(X) = M''_X(0) - \left[M'_X(0)\right]^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2.$$

Efectivamente, μ y σ^2 son la media y la varianza de la distribución normal. La esperanza es un **parámetro de posición** y sus distintos valores lo único que producen son traslaciones horizontales de la curva



Por su parte, σ es un **parámetro de escala** cuyas variaciones afectan a la dispersión de la variable



c) **Momentos con respecto a la media:** los de orden impar son todos cero $(\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \cdots = 0)$ debido a la simetría de la distribución respecto al eje $x = \mu$.

Los coeficientes de asimetría y curtosis para la distribución normal tienen la siguiente expresión:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0 \qquad \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0$$

Distribución normal tipificada *N*(0,1)

Estadísticamente, tipificar una variable X supone restarle a cada valor su media (constante) y dividirla por su desviación típica (constante):

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}.$$

Si $X \sim N(\mu,\sigma)$, entonces $Z = \dfrac{X - \mu_X}{\sigma_X} \sim N(0,1)$.

La función de densidad de una normal tipificada o estándar es:

Si $Z \sim N(0,1)$ entonces $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad -\infty < z < +\infty.$

Cálculo de probabilidades en la distribución normal:

- Para obtener la probabilidad $P(a \leq X \leq b)$, con $X \sim N(\mu,\sigma)$, en principio habría que calcular la siguiente integral:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

- La resolución de integrales sobre funciones de densidad normales resulta complicada, lo que lleva a la utilización de tablas.

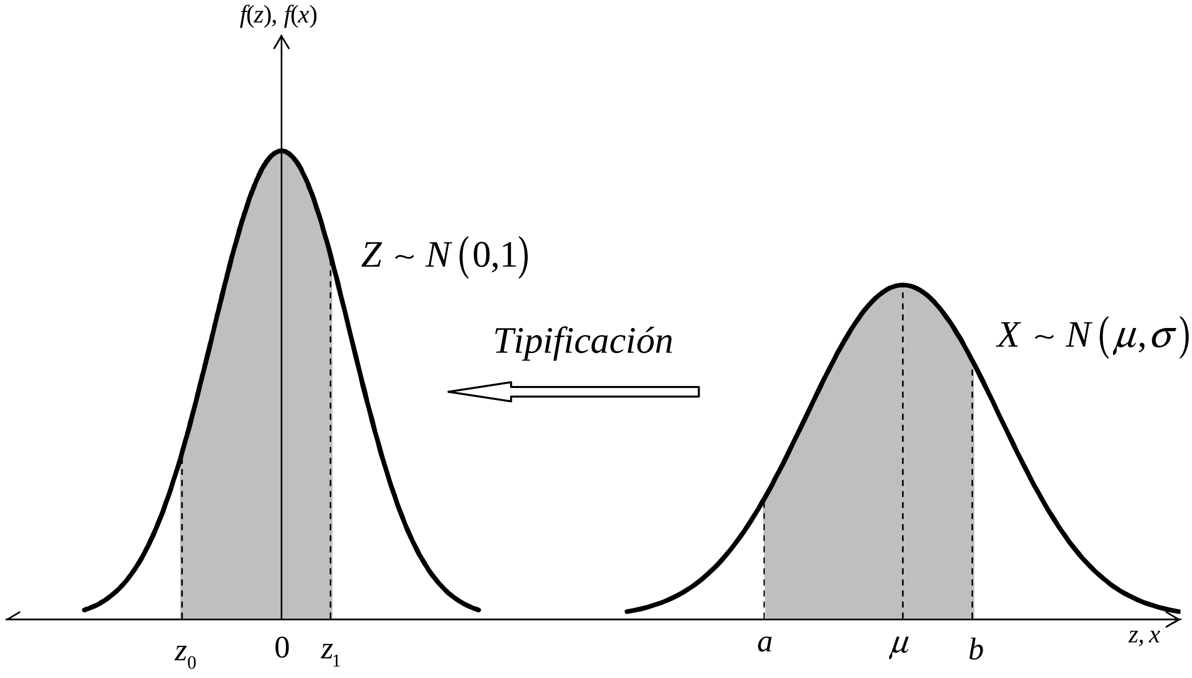
- Pero precisaríamos tablas con 3 entradas (μ,σ,a) ó (μ,σ,b), lo que resulta imposible, teniendo en cuenta que μ y σ pueden tomar infinitos valores distintos (recordemos que $-\infty < \mu < +\infty$ y $\sigma > 0$).

- Solución: tipificar la variable: mediante la tipificación conseguimos calcular probabilidades de cualquier distribución $N(\mu,\sigma)$ a partir de la distribución $N(0,1)$. Veámoslo:

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) =$$

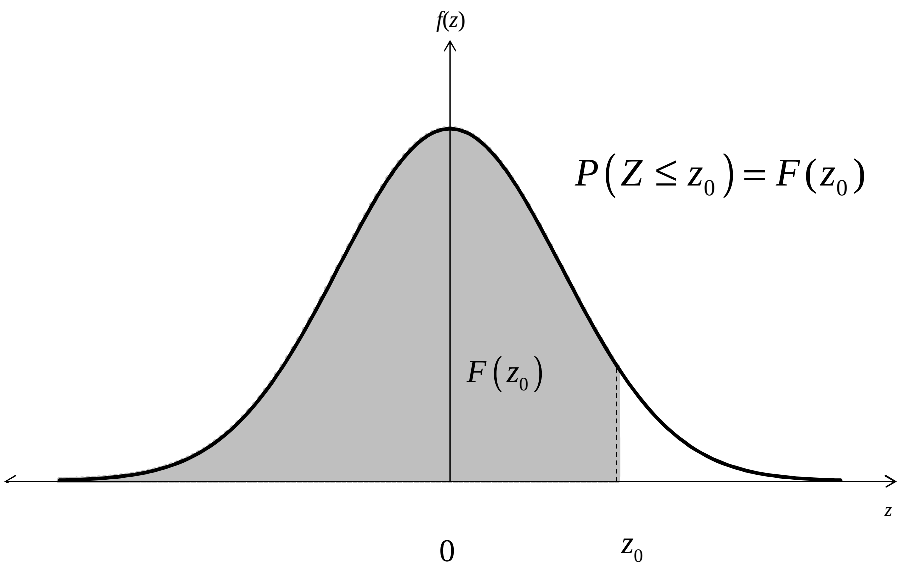
$$= P\left(z_0 \leq Z \leq z_1\right) = F_Z(z_1) - F_Z(z_0)$$

Por tanto, la probabilidad buscada es exactamente igual a la probabilidad de que la normal tipificada tome valores en el intervalo $\left[z_0, z_1\right]$.



Existen tablas que proporcionan valores aproximados de la función de distribución $F_Z(z)$ para distintos valores de z. Lo que proporcionan es, pues, la probabilidad acumulada a la izquierda de un punto concreto z_0. (véase Anexo 5.1)

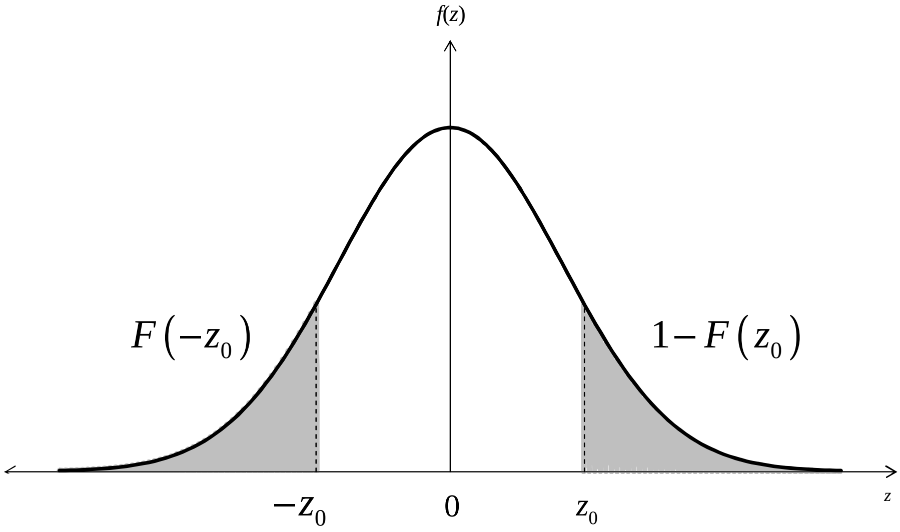
Figura 5.18
Distribución Normal Tipificada



Como la función de densidad de la distribución normal es completamente simétrica respecto a μ=0 es que $F(-z_0)=1-F(z_0)$.

Distribución Normal Tipificada

$$P\left(Z\le -z_0\right)=1-P\left(Z>z_0\right)$$



Además puede observarse en la gráfica que: $P\left(Z\le 0\right)=F_Z\left(0\right)=0,5,$ de manera que a valores negativos de z le corresponden probabilidades acumuladas inferiores a 0,5.

La tabla de la distribución normal contempla valores de z con dos decimales entre -3,59 y 3,59. El primer decimal se lee en la primera columna de la izquierda, mientras que el segundo decimal se lee en la primera fila de la tabla. El cuerpo central de la tabla nos da los valores de la función de distribución $F_Z\left(z_0\right)$, es decir, la probabilidad acumulada hasta el valor z_0 seleccionado.

Ejemplos:

1. Con $Z\sim N\left(0,1\right),$ calcule las siguiente probabilidades:

a) $P\left(Z\le 3,21\right)=F_Z\left(3,21\right)\underbrace{=}_{\text{tabla}}0,9993.$

b) $P\left(Z\ge 1,20\right)=1-P\left(Z\le 1,20\right)=1-F_Z\left(1,20\right)\underbrace{=}_{\text{tabla}}1-0,8849=0,1151.$

c) $P(-1,23 \le Z \le 0,85) = F_Z(0,85) - F_Z(-1,23) \underbrace{=}_{\text{tabla}} 0,8023 - 0,1093 = 0,693.$

2. Obtener el valor de k (valor crítico):

a) $P(Z \ge k) = 0,2946 \quad \Rightarrow P(Z \le k) = 1 - 0,2946 = 0,7054.$

Buscando esa probabilidad en la tabla tenemos que k=0,54.

b) $P(k \le Z \le -0,18) = 0,4199 \quad \Rightarrow F_Z(-0,18) - F_Z(k) = 0,4199.$

y dado que, según la tabla, $F_Z(-0,18) = 0,4286$,

$F_Z(k) = F_Z(-0,18) - 0,4199 = 0,4286 - 0,4199 = 0,0087.$

Buscando esa probabilidad en la tabla se tiene que $k = -2,38.$

3. Con $X \sim N(50,8)$, calcule las siguientes probabilidades:

a) $P(38 \le X \le 58)$

Tal y como hemos visto, para calcular esta probabilidad debemos tipificar la variable:

$$P(38 \le X \le 58) = P\left(\frac{38-50}{8} \le \frac{X-50}{8} \le \frac{58-50}{8}\right) = P(-1,5 \le Z \le 1) =$$

$$= F(1) - F(-1,5) \underbrace{=}_{\text{tablas}} 0,8413 - 0,0668 = 0,7745.$$

b) $P(X \ge 66)$

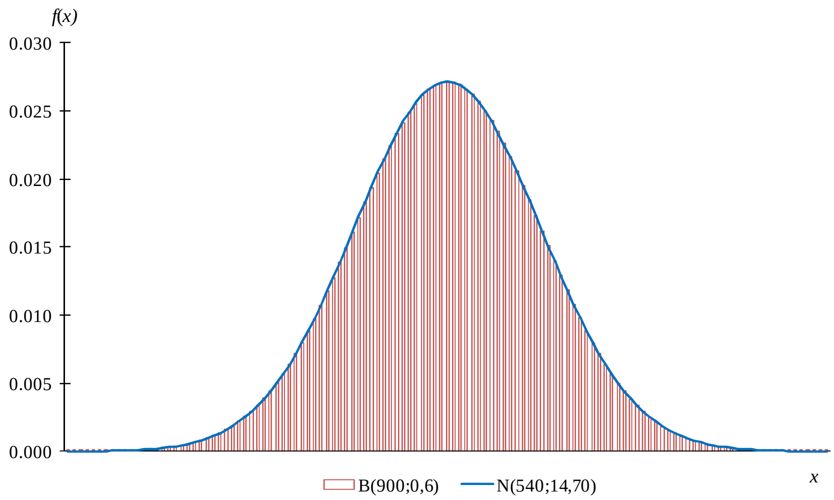
$$P(X \ge 66) = P\left(\frac{X-50}{8} \ge \frac{66-50}{8}\right) = P(Z \ge 2) = 1 - F_Z(2) \underbrace{=}_{\text{tablas}} 1 - 0,9772 = 0,0228.$$

Aproximación de la distribución binomial por la distribución normal

- Recordemos: la distribución binomial se aproxima a la distribución de Poisson cuando $n \to \infty$ y $p \to 0$. En la práctica $n > 50$ y $p \leq 0{,}1$.

- Cuando n es grande y p no está muy alejado de 0,5, se pueden calcular las probabilidades correspondientes a una binomial de forma aproximada utilizando una normal.

Figura 5.20
Aproximación de la distribución Binomial a la Normal



- Fundamento teórico: Teorema de Laplace-Moivre.

  Si X es una variable binomial, $X \sim B(n,p)$, con media np y desviación típica $\sqrt{npq}$, entonces:

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \underset{n \to +\infty}{\sim} N(0,1).$$

Los límites empíricos para poder realizar esta aproximación son:

Si $p \leq 0{,}5$ se exige que $np > 5$.

Si $p > 0{,}5$ se exige que $nq > 5$.

En general, cuanto más se aleje la probabilidad de éxito p de $0{,}5$, mayor tendrá que ser n.

- Utilizando este resultado podemos obtener la probabilidad de que la variable binomial X_B esté en un intervalo $[a,b]$ aproximando X_B con una normal X_N con media $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{npq}$ y calcular el área entre a y b:

$$P(a \le X_B \le b) \simeq \underbrace{P\left(a \le X_N \le b\right)}_{\text{con } X_N \sim N\left(np, \sqrt{npq}\right)} = P\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} \le Z \le \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

- La aproximación mejora si, en la variable normal utilizamos el intervalo $a - 0,5 \le X_N \le b + 0,5$. Esto se conoce como ***corrección por continuidad*** y se hace necesario porque se está aproximando una distribución discreta por otra continua.

  Piénsese que $P(X_B = a)$ es distinta de cero para la binomial pero igual a cero para la distribución normal por ser continua. Lo que hacemos es aproximar esa probabilidad por la probabilidad de una normal en un intervalo de longitud uno (que es el incremento de la variable binomial), centrado en ese valor a.

Ejemplo:

La probabilidad de recibir un cheque sin fondos en una determinada sucursal bancaria es del 15%. Si durante una semana se espera recibir 2000 cheques, hállense las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Que haya, como máximo, 175 cheques sin fondos.

b) Que el número de cheques sin fondos esté comprendido entre 260 y 400.

Resolución:

X = "nº de cheques sin fondos recibidos en una semana"

$X \sim B(2000; 0,15)$

En este ejemplo, Si $p = 0,15 \le 0,5$ y $np = 2000 \cdot 0,15 = 300 > 5$, por lo que podemos aproximar la distribución binomial por la distribución normal $X_N \sim N\left(\mu = 300, \sigma = \sqrt{npq} = 16\right)$:

a) $P(X \leq 175) \simeq P(X_N \leq 175+0,5) = P\left(Z \leq \frac{175+0,5-300}{16}\right) = P(Z \leq -7,78) \underbrace{=}_{\text{tablas}} 0.$

b)

$$P(260 \leq X \leq 400) \simeq P(260-0,5 \leq X_N \leq 400+0,5) =$$

$$= P\left(\frac{260-0,5-300}{16} \leq Z \leq \frac{400+0,5-300}{16}\right) =$$

$$= P(-2,53 \leq Z \leq 6,28) = F(6,28) - F(-2,53) \underbrace{=}_{\text{tablas}} 1-0,0057 = 0,9943.$$

Aproximación de la distribución de Poisson por la distribución normal.

Si X_P se distribuye según una distribución de Poisson de parámetro μ, siendo $\boxed{\mu \geq 10}$, se puede aproximar esta distribución de Poisson por una normal $N(\mu_N, \sigma_N)$, con $\mu_N = E[X_P] = \mu$ y $\sigma_N = \sqrt{Var(X_P)} = \sqrt{\mu}$.

Teniendo también en cuenta la corrección por continuidad, la manera de aproximar probabilidades de la distribución será la siguiente:

$$P(a \leq X_P \leq b) \simeq \underbrace{P\left(a-\frac{1}{2} \leq X_N \leq b+\frac{1}{2}\right)}_{\text{con } X_N \sim N(\mu,\sqrt{\mu})} = P\left(\frac{a-\frac{1}{2}-\mu}{\sqrt{\mu}} \leq Z \leq \frac{b+\frac{1}{2}-\mu}{\sqrt{\mu}}\right) =$$

$$= F_Z\left(\frac{b+\frac{1}{2}-\mu}{\sqrt{\mu}}\right) - F_Z\left(\frac{a-\frac{1}{2}-\mu}{\sqrt{\mu}}\right) \quad \text{donde } Z \sim N(0,1).$$

Distribución de una combinación lineal de variables normales independientes

Supongamos que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son n variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n.$ Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales, entonces la variable aleatoria:

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n$$

sigue una distribución:

$$Y \sim N\left(a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots a_n\mu_n, \sqrt{a_1^{\,2}\sigma_1^{\,2} + a_2^{\,2}\sigma_2^{\,2} + \ldots + a_n^{\,2}\sigma_n^{\,2}}\right)$$

o, lo que es lo mismo:

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\sigma_i^{\,2}}\right)$$

Demostración:

$$M_Y(t) = E\left[e^{tY}\right] = E\left[e^{t(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n)}\right] = E\left[e^{ta_1X_1} e^{ta_2X_2} \cdots e^{ta_nX_n}\right] \underbrace{=}_{\substack{\text{por} \\ \text{independencia}}}$$

$$= E\left[e^{ta_1X_1}\right] E\left[e^{ta_2X_2}\right] \cdots E\left[e^{ta_nX_n}\right] = M_{X_1}(t_1') M_{X_2}(t_2') \cdots M_{X_n}(t_n') =$$

$$= e^{t\mu_1a_1 + \frac{1}{2}t^2\sigma_1^{\,2}a_1^{\,2}} e^{t\mu_2a_2 + \frac{1}{2}t^2\sigma_2^{\,2}a_2^{\,2}} \cdots e^{t\mu_na_n + \frac{1}{2}t^2\sigma_n^{\,2}a_n^{\,2}} = e^{t(a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_n\mu_n) + \frac{1}{2}t^2(a_1^{\,2}\sigma_1^{\,2} + a_2^{\,2}\sigma_2^{\,2} + \cdots + a_n^{\,2}\sigma_n^{\,2})}.$$

Esta es la función generatriz de momentos de una variable aleatoria distribuida según una normal de parámetros $\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_n\mu_n$ y $\sigma = \sqrt{a_1^{\,2}\sigma_1^{\,2} + a_2^{\,2}\sigma_2^{\,2} + \cdots + a_n^{\,2}\sigma_n^{\,2}}$. Teniendo en cuenta el Teorema de Unicidad de la función generatriz de momentos, se concluye que, efectivamente:

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\sigma_i^{\,2}}\right).$$

A partir de esta propiedad se deduce la propiedad reproductiva, haciendo $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$:

La suma de n variables aleatorias <u>independientes,</u> $X_1, X_2, \ldots, X_n$, tales que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ con $i = 1, 2, \ldots, n$, sigue una distribución $N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right)$.

Relación entre la distribución normal y la Ji-Dos

Anteriormente se ha definido la distribución χ_ν^2 a partir de la distribución Gamma. En concreto, se señaló que:

$$\chi_\nu^2 = G\left(\underbrace{\frac{\nu}{2}}_{=\alpha}, \underbrace{2}_{=\beta}\right).$$

También puede definirse sin recurrir a esa distribución:

Si $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\nu$ son ν variables aleatorias <u>independientes</u> tales que $Z_i \sim N(0,1)$ con $i = 1, 2, \ldots, \nu$, entonces:

$$Y = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2 \sim \chi_\nu^2.$$

Demostración:

La demostración se hace en dos fases. Primero, se demuestra que si $Z \sim N(0,1)$, entonces $Z^2 \sim \chi_1^2$. Después se aplica la propiedad reproductiva de la Ji-dos, para llegar al resultado deseado.

Por tanto, en una distribución χ_ν^2 <u>los grados de libertad son el número de variables aleatorias independientes que la integran</u>. Aquí hemos supuesto que todas las variables aleatorias son independientes, pero podría ocurrir, por ejemplo, que una variable dependiese de las demás. Entonces tendríamos $\nu - 1$ sumandos independientes y los grados de libertad serían $\nu - 1$.

7.7. Distribución *t* de Student

- La distribución *t* de Student o *t*-Student está relacionada con la distribución normal y con la Ji-dos y es ampliamente utilizada en Inferencia Estadística.

- **Definición:**

  Sea $Z \sim N(0,1)$ y $V \sim \chi^2_\nu$. Si Z y V son <u>independientes</u>, entonces se puede demostrar que:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{\nu}}} \sim t_\nu$$

  es decir, se distribuye como una distribución *t*-Student con ν grados de libertad. Por tanto:

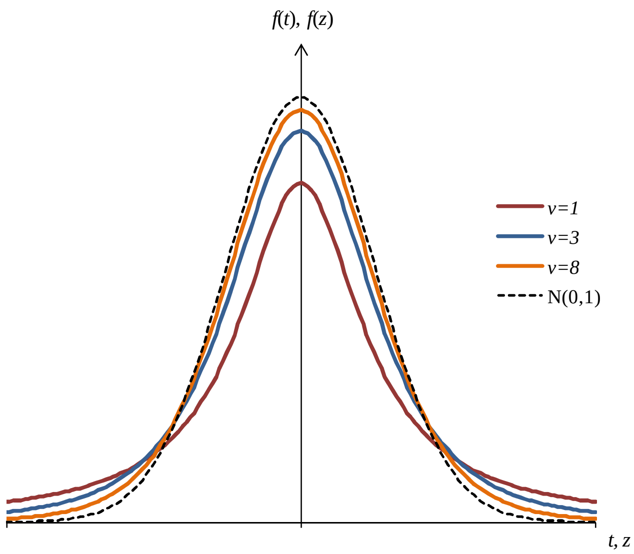
$$T = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_\nu / \nu}} \sim t_\nu$$

- **Función de densidad:**

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \qquad -\infty < t < \infty \text{ y } \nu \text{ entero y positivo.}$$

  Es una distribución uniparamétrica; sólo depende de ν.

- **Forma de la distribución:**



1. Es simétrica respecto al origen de coordenadas.

2. Alcanza un máximo en t=0.

3. El eje de abscisas es una asíntota de la función.

4. Su forma es muy parecida a la normal tipificada (campaniforme), pero es menos apuntada (es decir, es platicúrtica), siendo las colas más altas (presenta mayor dispersión que la normal tipificada).

5. Cuando ν aumenta, la distribución t- Student tiende a la distribución N(0,1). En la práctica, para $\nu \geq 30$ es muy poca la ventaja de utilizar la t-Student en lugar de la N(0,1).

- **Características:**

Esperanza: $E\left[T\right]=0$ si ν>1 (si ν=1 no existe la media).

Varianza: $Var(T)=\dfrac{\nu}{\nu-2}$ si $\nu>2$ (si ν=1 ó ν=2 no existe la varianza).

- **Obtención de probabilidades:**

La función de distribución de la t-Student está tabulada para algunas probabilidades (véase Anexo 5.1). Veamos, a continuación, algunos ejemplos para ejercitar el manejo de esas tablas:

1. Si $X \sim t_{10}$:

   a) $P\left(X \leq 2,228\right) \underbrace{=}_{\text{tabla}} 0,975.$

   b) $P\left(X > b\right)=0,01 \;\Rightarrow\; P\left(X \leq b\right)=0,99 \underset{\text{tabla}}{\Rightarrow} b=2,764.$

2. Si $X \sim t_{20}$:

a) $P(X \leq 1,325) \underbrace{=}_{\text{tabla}} 0,9.$

b) $P(X > b) = 0,01 \;\Rightarrow\; P(X \leq b) = 0,99 \underset{\text{tabla}}{\Rightarrow} b = 2,528.$

3. Si $X \sim t_8$:

$$P(|X| \leq 2,306) = P(-2,306 \leq X \leq 2,306) = P(X \leq 2,306) - P(X \leq -2,306) =$$

$$= F(2,306) - F(-2,306) = 0,975 - 0,025 = 0,95.$$

4. Si $X \sim t_{12}$:

$$P(|X| \leq x^*) = 0,99 \;\Rightarrow\; F(x^*) - F(-x^*) = 0,99 \underset{\substack{\text{por}\\ \text{simetría}}}{\Rightarrow} F(x^*) - \left[1 - F(x^*)\right] = 0,99$$

$$2F(x^*) = 1 + 0,99 \;\Rightarrow\; F(x^*) = \frac{1 + 0,99}{2} = 0,995 \underset{\text{tabla}}{\Rightarrow} x^* = 3,055.$$

7.8. Distribución *F* de Snedecor

- La distribución *F* de Snedecor, también conocida como de distribución de Fischer-Snedecor, es de uso frecuente en Inferencia Estadística y está relacionada con la distribución normal.

- **Definición:**

  Si X e Y son dos **variables aleatorias independientes** que se distribuyen como una ji-dos con ν_1 y ν_2, respectivamente, la variable:

$$F = \frac{X/\nu_1}{Y/\nu_2} \sim F_{\nu_1,\nu_2}$$

  se dice que tiene una distribución F con ν_1 en el numerador y ν_2 en el denominador. Es decir:

$$F = \frac{\chi^2_{\nu_1}/\nu_1}{\chi^2_{\nu_2}/\nu_2} \sim F_{\nu_1,\nu_2}$$

- **Función de densidad:**

$$g(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)\nu_1^{\nu_1/2}\nu_2^{\nu_2/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \cdot \frac{f^{\left(\frac{\nu_1-2}{2}\right)}}{(\nu_2+\nu_1 f)^{\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}} \quad \text{para } f > 0.$$

  Sólo está definida para valores positivos de la variable. Es una distribución biparamétrica (ν_1 y ν_2).

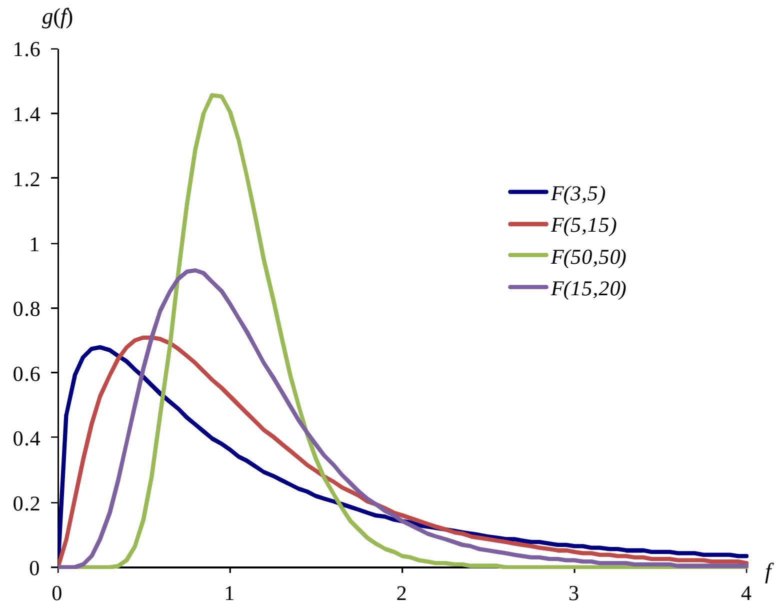
- **Características:**

$$E(F) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \quad \text{con } \nu_2 > 2.$$

$$Var(F) = \frac{\nu_2^2(2\nu_2 + 2\nu_1 - 4)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)} \quad \text{con } \nu_2 > 4.$$

- **Forma de la distribución:**

Es campaniforme con asimetría positiva, que disminuye al aumentar los grados de libertad de numerador y denominador.



- **Obtención de probabilidades:**

Su función de distribución está tabulada para algunas probabilidades y valores de sus parámetros (véase Anexo 5.1).

En la primera fila de las tablas correspondientes a la distribución F de Snedecor aparece ν_1, los grados de libertad del numerador. En la primera columna, ν_2, los grados de libertad del denominador. En el cuerpo de cada una de esas tablas aparecen, para los diferentes valores de ν_1 y ν_2, los valores de la F_{ν_1,ν_2} que a su izquierda dejan un área bajo la curva de la función de densidad igual a la indicada en la parte superior (A).

Ejemplos:

1. Si $X \sim F_{6,15}$: $P\left(X \leq 0,25\right) \underbrace{=}_{\text{tabla}} 0,05.$

2. Si $X \sim F_{6,17}$:

$$P\left(X > b\right) = 0,05 \;\Rightarrow\; P\left(X \leq b\right) = 0,95 \underset{\text{tabla}}{\Rightarrow} b = f_{0,95;6,17} = 2,7.$$

3. Si $X \sim F_{7,20}$: $P\left(X < b\right) = 0,01 \underset{\text{tabla}}{\Rightarrow} b = f_{0,01;7,20} = 0,16.$

Propiedad de reciprocidad

Esta propiedad ayuda a obtener probabilidades de la distribución F de Snedecor a partir de las tablas:

Si $F \sim F_{\nu_1,\nu_2}$ y $F' \sim F_{\nu_2,\nu_1}$ entonces: $f_{p;\nu_1,\nu_2} = \dfrac{1}{f'_{1-p;\nu_2,\nu_1}}$

Ejemplos:

1. Para $X \sim F_{7,20}$ vimos anteriormente que $P\left(X \leq b\right) = 0,01 \;\Rightarrow\; b = f_{0,01;7,20}$=0,16. Por la propiedad de reciprocidad se tiene que:

$$f_{0,01;7,20} = \frac{1}{f'_{0,99;20,7}} \underbrace{=}_{\text{tabla}} \frac{1}{6,16} = 0,16.$$

2. La distribución $F_{14,10}$ no aparece tabulada en las tablas. Pero, para esa distribución podemos identificar el valor b que hace que $P\left(X \leq b\right) = 0,95$ si aplicamos la propiedad de reciprocidad, ya que la distribución $F_{10,14}$ si aparece tabulada:

$$f_{0,95;14,10} = \frac{1}{f'_{0,05;10,14}} \underbrace{=}_{\text{tabla}} \frac{1}{0,35} = 2,86.$$

Relación entre distribuciones *t*-Student y *F* de Snedecor:

Si $T \sim t_\nu$ entonces $T^2 \sim F_{1,\nu}$.

Demostración:

Si $T \sim t_\nu$ se tiene que $T = \dfrac{Z}{\sqrt{X/\nu}}$ con $Z \sim N(0,1)$, $X \sim \chi_\nu^2$ y Z y X independientes, entonces:

$T^2 = \dfrac{Z^2}{X/\nu}$ con $Z^2 \sim \chi_1^2$, $X \sim \chi_\nu^2$ y Z^2 y X independientes.

Por tanto, $T^2 \sim F_{1,\nu}$ o escrito de otra forma: $t_\nu^2 \sim F_{1,\nu}$.

7.9. Distribución normal bivariante

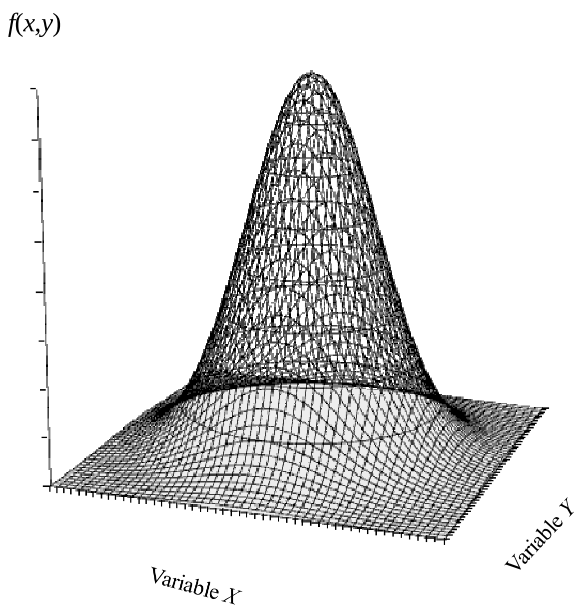
Se dice que dos variables aleatorias continuas X e Y se distribuyen según una distribución normal bivariante si su función de densidad conjunta es:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\,e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-2\rho\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]}\qquad -\infty<x<\infty\quad -\infty<y<\infty$$

donde:

$E[X]=\mu_X \quad E[Y]=\mu_Y \quad Var(X)=\sigma_X^2 \quad Var(Y)=\sigma_Y^2 \quad \rho:$ coeficiente de correlación.

Figura 5.23
Distribución Normal Bivariante
(función de densidad conjunta)



A partir de esta función de densidad conjunta **se deduce**:

1. Las distribuciones marginales son distribuciones normales con

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X) \qquad\qquad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$$

2. Las distribuciones condicionadas son también normales.

$$f\left(y/x\right) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \qquad\qquad f\left(x/y\right) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

3. Las esperanzas condicionadas (líneas de regresión) son líneas rectas:

$$E\left[Y/X=x\right] = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X) \qquad E\left[X/Y=y\right] = \mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)$$

4. Las varianzas condicionadas son constantes:

$$Var\left(Y/X=x\right) = \sigma_Y^2(1-\rho^2) \qquad Var\left(X/Y=y\right) = \sigma_X^2(1-\rho^2)$$

5. A partir de la función de densidad conjunta se tiene que si $\rho = 0$, entonces $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$. Por tanto, si $\rho = 0$ las variables son independientes.

En el caso de variables conjuntamente normales, sólo pueden darse relaciones lineales entre las variables ya que cuando no hay relación lineal $(\rho = 0)$ no hay ninguna relación (hay independencia).

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Una universidad estudia la posibilidad de comprar un lote grande de aparatos de detección de incendios. Por la experiencia de otras universidades se sabe que el 20% de estos aparatos suelen ser defectuosos. Si se selecciona aleatoriamente una muestra de 200 aparatos, ¿cuál es la probabilidad de encontrar entre 42 y 50 defectuosos?

Resolución:

$Y =$ "Nº de aparatos defectuosos de un total de $n = 200$"

$p = P(\text{defectuoso}) = 0,2$

$Y \sim B(200; 0,2)$ con $f(y) = \binom{200}{y} 0,2^y 0,8^{200-y}$ para $y = 0,1,2,\ldots,200$

$$P(42 \le Y \le 50) = \sum_{y=42}^{y=50} \binom{200}{y} 0,2^y 0,8^{200-y}$$

Obsérvese que $p = 0,2 < 1/2$ y $np = 40 > 5$, por lo que se cumplen las condiciones para aplicar el Teorema de Moivre y aproximar esa probabilidad a partir de una distribución normal:

$$Y_N \sim N(np, \sqrt{npq}) \quad \Rightarrow \quad Y_N \sim N(40; 5,66)$$

$$P(42 \le Y \le 50) \underbrace{\simeq}_{\substack{\text{con corrección}\\ \text{de}\\ \text{continuidad}}} P(41,5 \le Y_N \le 50,5) = P\left(\frac{41,5-40}{5,66} \le Z \le \frac{50,5-40}{5,66}\right) =$$

$$= P\left(0,26 \le Z \le 1,85\right) = F_Z(1,85) - F_Z(0,26) \underbrace{=}_{\text{tablas}} 0,9678 - 0,6026 = 0,3652.$$

2. Suponga que la llegada de vehículos a un cruce puede modelizarse por un proceso de Poisson. Si la probabilidad de que no pase ningún vehículo en un minuto es 0,135, se pide:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que pase más de un vehículo en dos minutos?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre la llegada de un vehículo y la del siguiente transcurran más de 15 minutos?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo transcurrido entre la llegada del primer y último vehículo de un grupo de 5 sea menor de 2 minutos?

Resolución:

$X =$ "Nº de vehículos que llegan a un cruce en 1 minuto"

$$X \sim P(\mu) \text{ con } f(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} \quad \text{para } x = 0,1,2,\ldots$$

Desconocemos el valor de la media, pero el enunciado proporciona un dato que permite calcularla:

$$P(X=0) = 0{,}135 \;\rightarrow\; \frac{e^{-\mu}\mu^0}{0!} = e^{-\mu} = 0{,}135 \underbrace{\;\rightarrow\;}_{\substack{\text{tomando}\\ \text{logaritmos}}} -\mu = \ln(0{,}135) \;\rightarrow \mu \simeq 2$$

a) $Y =$ "Nº de vehículos que llegan a un cruce en 2 minutos"

La variable Y es la suma de dos variables aleatorias, X_1 y X_2, que se pueden suponer independientes y que se distribuyen según una Poisson $X_i \sim P(2)$. Por la propiedad reproductiva de la distribución de Poisson se tiene que:

$$Y = X_1 + X_2 \sim P(2\mu) \quad \rightarrow \quad Y \sim P(4) \text{ con } f(y) = \frac{e^{-4}4^y}{y!} \quad \text{para } y = 0,1,2,\ldots$$

La probabilidad solicitada es:

$$P(Y>1) = 1 - P(Y\le 1) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) = 1 - \frac{e^{-4}4^0}{0!} - \frac{e^{-4}4^1}{1!} = 0{,}9084.$$

b) $T =$ "tiempo en minutos transcurrido entre la llegada de dos vehículos"

Como sabemos, el tiempo transcurrido entre la presentación de sucesos consecutivos de Poisson sigue una distribución exponencial, de parámetro $\beta = 1/\mu$, donde μ representa la intensidad del proceso de Poisson. Por tanto:

$$T \sim Exp\left(\frac{1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad T \sim Exp(0,5)$$

siendo $f(x) = \dfrac{1}{0,5} e^{-\frac{x}{0,5}} \quad x > 0$ y $P(X > x) = e^{-\frac{x}{0,5}}$ (función de supervivencia)

La probabilidad solicitada es:

$$P(T > 15) \underbrace{=}_{\substack{\text{función de}\\ \text{supervivencia}}} e^{-\frac{15}{0,5}} = e^{-30} \simeq 0$$

c) $W =$ "tiempo transcurrido entre la llegada del primer y último vehículo de un grupo de 5"

La variable W es la suma de 4 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como una exponencial de parámetro $\beta = 0,5$. En esta situación, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} W = \sum_{i=1}^{4} T_i \\ T_i \text{ indep. } T_j, \text{ para } i \neq j \quad i, j = 1,2,3,4 \\ T_i \sim Exp(0,5) \end{array}\right\} \Rightarrow W \sim G(4; 0,5)$$

$$P(W < 2) = P\left(\frac{2W}{0,5} < \frac{2 \cdot 2}{0,5}\right) \underbrace{=}_{\substack{\text{donde } \frac{2W}{0,5} \sim \chi_8^2 \\ (\nu = 2 \cdot \alpha = 8)}} P\left(\chi_8^2 < \frac{4}{0,5}\right) = P\left(\chi_8^2 < 8\right) \underbrace{=}_{\text{tabla}} 0,4655$$

3. El tiempo en minutos que tarda una persona en ir de su casa al trabajo oscila entre 20 y 30 minutos. Si debe llegar al trabajo a las 8 de la mañana, ¿a qué hora debe salir de su casa para tener una probabilidad de 0,9 de no llegar tarde?

Resolución:

$X =$ "tiempo en ir de casa al trabajo (en minutos)"

$X \sim U[20,30]$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{30-20} = \dfrac{1}{10} & 20 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La hora a la que debe salir de casa será las 8:00 menos x_0 minutos, donde x_0 cumple la condición $P(X \leq x_0) = 0,9$:

$$\int_{20}^{x_0} \frac{1}{10} dx = 0,9 \quad \rightarrow \quad 0,1[x]_{20}^{x_0} = 0,9 \quad \rightarrow \quad 0,1(x_0 - 20) = 0,9 \quad \rightarrow \quad x_0 = 29.$$

Por tanto, el trabajador ha de salir 29 minutos antes de las 8:00 para no llegar tarde con probabilidad de 0,9, es decir, a las 7:31 minutos.

4. Suponga que cinco empleados realizan la misma tarea de forma independiente y que el tiempo, en minutos, que uno cualquiera de ellos tarda en terminarlo sigue una distribución exponencial de media igual a 80 minutos. Si comienzan la tarea a las 9:00 horas, calcule la probabilidad de que, como mínimo, dos de los cinco trabajadores terminen dicha tarea antes de las 10:00.

Resolución:

$Y =$ "tiempo que un empleado tarda en acabar la tarea (minutos)"
$Y \sim Exp(80)$

$X =$ "Nº de empleados que acaban su tarea antes de las 10:00 de $n = 5$"

Los trabajadores realizan su tarea de manera independiente (pruebas independientes). La variable X se distribuye según una binomial donde $n = 5$ y la probabilidad de éxito p es la probabilidad de que un empleado acabe su tarea antes de las 10:00 (p constante). Por tanto:

$$p = P(Y \leq 60) = F(60) = 1 - e^{-\frac{y}{\beta}} = 1 - e^{-\frac{60}{80}} = 0,5276$$

de manera que $X \sim B(5; 0,5276)$ y la probabilidad solicitada es:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$

$$= 1 - \binom{5}{0}(0,5276)^0(0,4724)^5 - \binom{5}{1}(0,5276)^1(0,4724)^4 = 0,8451.$$

5. Los ingresos familiares brutos (en miles de euros) de un determinado país siguen una distribución Ji-dos con media 3. Si se seleccionan aleatoriamente 15 familias de ese país, ¿cuál es la probabilidad de que 9 ó 10 de esas familias tengan unos ingresos brutos superiores a 6250 euros?

Resolución:

$$Y = \text{"ingresos familiares brutos (en miles de euros)"} \quad \rightarrow \quad Y \sim \chi_3^2$$

$$X = \text{"Nº de familias con ingresos brutos superiores a 6250 euros con } n = 15\text{"}$$

Las familias obtienen sus ingresos de manera independiente (pruebas independientes). La variable X se distribuye según una binomial donde $n = 15$ y la probabilidad de éxito p es la probabilidad de que una familia obtenga ingresos brutos superiores a 6250 euros (p constante). Por tanto:

$$p = P(Y > 6,25) = 1 - P(Y \leq 6,25) = 1 - P(\chi_3^2 \leq 6,25) \underbrace{=}_{\text{tablas}} 1 - 0,9 = 0,1.$$

de manera que $X \sim B(15; 0,1)$ y la probabilidad solicitada es:

$$P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{15}{9}(0,1)^9(0,9)^6 + \binom{15}{10}(0,1)^{10}(0,9)^5 \underbrace{\simeq}_{\text{tablas}} 0.$$

6. Una empresa sabe que, durante un período determinado de tiempo, la demanda aleatoria del artículo que produce se comporta con arreglo a una ley normal de media 1500 unidades y desviación estándar 100 unidades. Se pide:
   a) Determine el número de artículos que debe producir en dicho período para poder satisfacer la demanda con una probabilidad de 0,95.
   b) Si la empresa decide seguir produciendo el artículo en el futuro sólo si la demanda está comprendida entre 1304 y 1696 unidades, determine la probabilidad de que no siga produciendo tal artículo.

Resolución:

$X = \text{"demanda del producto (en unidades)"} \quad \rightarrow \quad X \sim N(1500, 100)$

a) $P(X \leq x_0) = 0,95$

Tipificando: $P\left(Z \leq \dfrac{x_0 - 1500}{100}\right) = 0,95 \quad \rightarrow \quad P\left(Z \leq z_0\right) = 0,95 \quad \underbrace{\rightarrow}_{\text{tablas}} \quad z_0 = 1,645$

$$z_0 = \frac{x_0 - 1500}{100} \quad \rightarrow \quad x_0 = 1664,5 \simeq 1665 \text{ unidades.}$$

b) La probabilidad de que no siga produciendo el artículo es igual a $1 - P(1304 \leq X \leq 1696)$:

$$P(1304 \leq X \leq 1696) = P\left(\frac{1304 - 1500}{100} \leq \frac{X - 1500}{100} \leq \frac{1696 - 1500}{100}\right) =$$

$$= P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) \underbrace{=}_{\text{tablas}} 0,95.$$

Por tanto, la probabilidad de que la empresa deje de producir su artículo es del 5%.

7. Una línea eléctrica se avería cuando la tensión sobrepasa la capacidad de la línea. Si la tensión se distribuye como una normal de media 100 y desviación estándar 20 y la capacidad como una normal de media 140 y desviación estándar 10, calcule la probabilidad de avería suponiendo que la tensión y la capacidad son independientes.

Resolución:

$X = \text{"Tensión"} \quad \rightarrow \quad X \sim N(100, 20)$
$Y = \text{"Capacidad"} \quad \rightarrow \quad Y \sim N(140, 10)$
X e Y son independientes.

Se produce avería cuando $X > Y$, es decir, cuando $X - Y > 0$. Consideremos la variable aleatoria $W = X - Y$. Ésta variable es una combinación lineal de variables aleatorias normales independientes. Por tanto, W sigue también una distribución normal:

$$W = X - Y \sim N\left(100 - 140, \sqrt{20^2 + 10^2}\right) \quad \rightarrow \quad W \sim N\left(-40; 22,36\right)$$

La probabilidad de que se produzca avería es:

$$P(W > 0) = P\left(Z > \frac{0 + 40}{22,36}\right) = P(Z > 1,7889) = 1 - P(Z \leq 1,7889) \underbrace{\simeq}_{\text{tablas}} 0,0367.$$

8. Se supone que las desviaciones diarias, en valor absoluto, de la cotización de una moneda respecto a una banda prevista siguen una ley exponencial de media 0,05. Se pide:
   a) Calcule la probabilidad de que la desviación en valor absoluto en un día seleccionado al azar sea inferior a 0,02.
   b) Calcule la probabilidad de que la suma de las desviaciones en valor absoluto en diez días seleccionados al azar sea superior a 0,78526.
   c) Calcule la probabilidad de que sólo dos de las desviaciones anteriores sean superiores a 0,05.

Resolución:

$X =$ "Desviaciones diarias (en valor absoluto)"

$$X \sim Exp(0,05) \quad \to \quad f(x) = \frac{1}{0,05} e^{-\frac{x}{0,05}} \text{ para } x \geq 0 \text{ y } F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{0,05}} \text{ para } x \geq 0$$

a) $P(X < 0,02) = 1 - e^{-\frac{0,02}{0,05}} = 0,3297.$

b) $Y =$ "suma de desviaciones (en valor absoluto) en $n = 10$ días seleccionados al azar"

La variable Y es la suma de 10 variables aleatorias exponenciales independientes, de manera que Y se distribuye según una gamma de parámetros $Y \sim G(10; 0,05)$. De esta manera, la probabilidad solicitada es:

$$P(Y > 0,78526) = 1 - P(Y \leq 0,78526) = 1 - P\left(\frac{2Y}{0,05} \leq \frac{2 \cdot 0,78526}{0,05}\right) =$$

$$= 1 - P\left(\chi^2_{20} \leq 31,4104\right) \underbrace{\simeq}_{\text{tablas}} 0,05.$$

c) $W =$ "Nº de desviaciones superiores a 0,05 de un total de $n = 10$"

$$W \sim B(10, p) \text{ donde } p = P(X > 0,05) \underbrace{=}_{\substack{\text{función de} \\ \text{supervivencia}}} e^{-\frac{0,05}{0,05}} = 0,3679$$

Por tanto, $W \sim B(10; 0,3679)$, de manera que la probabilidad solicitada es:

$$P(W=2)=\binom{10}{2}(0,3679)^2(0,6321)^8=0,1552.$$

9. Entre las parejas en las que hombre y mujer trabajan, la distribución conjunta de los salarios mensuales (X,Y), expresados en euros, se ajusta a una distribución normal bivariante con los siguientes parámetros.

   X, salario de los hombres, con $\mu_X=1720$ y $\sigma_X=100$
   Y, salario de las mujeres, con $\mu_Y=1420$ y $\sigma_Y=80$
   ρ, coeficiente de correlación lineal, 0,71.

   Calcule:
   a) Salario medio de las mujeres cuya pareja tiene un salario de 1800.
   b) Probabilidad de que la mujer gane más que su pareja, cuando el salario del hombre es 1700.
   c) Probabilidad de que la mujer gane menos que su pareja, cuando el salario del hombre es 1800.

Resolución:

a) La línea de regresión de Y sobre X proporciona los valores medios de la variable Y cuando X toma el valor concreto x. En el caso de la distribución normal bivariante, su expresión es la de la siguiente línea recta:

$$E[Y/X=x]=\mu_Y+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$$

En nuestro caso: $E[Y/X=x]=1420+0,71\frac{80}{100}(x-1720)$

Por tanto, $E[Y/X=1800]=1420+0,71\frac{80}{100}(1800-1720)=1465,44$

b) $P(Y>1700/X=1700)$

Sabemos que $X/Y=x$ se distribuye normal con:

$$E[Y / X = x] = \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X) \qquad Var[Y / X = x] = \sigma_Y^2 (1 - \rho^2)$$

Por tanto, $X / Y = 1700$ es una variable aleatoria que se distribuye normal con:

$$E[Y / X = 1700] = 1420 + 0,71 \frac{80}{100}(170 - 172) = 1406,64$$

$$Var[Y / X = 1700] = 80^2 \left[1 - (0,71)^2\right] = 3173,76$$

La probabilidad solicitada es:

$$P(Y > 1700 / X = 1700) = P\left(\frac{Y - 1408,64}{\sqrt{3173,76}} > \frac{1700 - 1408,64}{\sqrt{3173,76}}\right) = P(Z > 5{,}17) \simeq 0.$$

c) $P(Y < 1800 / X = 1800)$

$X / Y = 1800$ es una variable aleatoria que se distribuye normal con:

$E[Y / X = 1800] = 1465,44$ (ya calculada en el apartado a)

$Var[Y / X = 1800] = 80^2 \left[1 - (0,71)^2\right] = 3173,76$ (la misma que para $X = 1700$)

$$P(Y < 1800 / X = 1800) = P\left(\frac{Y - 1465,44}{\sqrt{3173,76}} < \frac{1800 - 1465,44}{\sqrt{3173,76}}\right) = P(Z < 5{,}94) \simeq 1$$